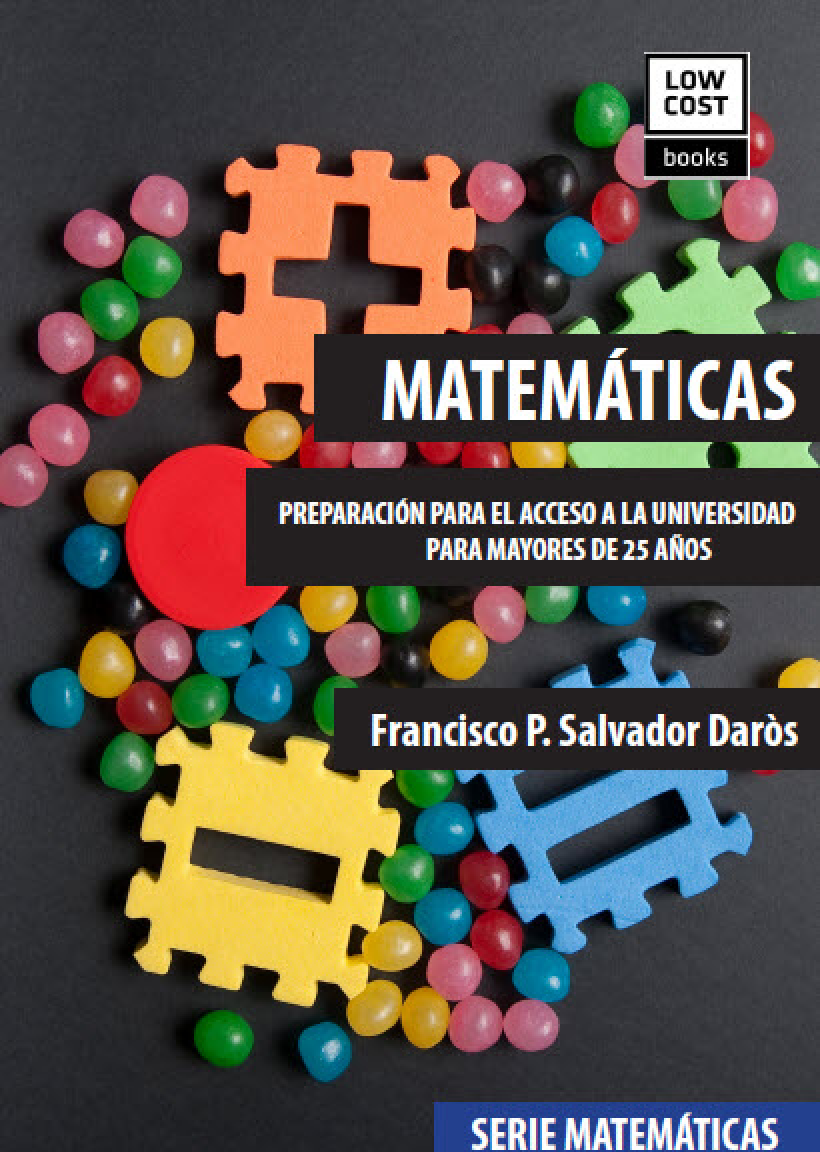


LOW COST books

# MATEMÁTICAS

## PREPARACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS

Francisco P. Salvador Daròs

SERIE MATEMÁTICAS

# PRESENTACIÓN

Con el presente libro trato de ayudar a las personas que suelen llegar a la escuela de adultos e intentan realizar el acceso a la universidad para mayores de 25 años, pero normalmente hace mucho que no estudian matemáticas. He intentado quitar el formalismo matemático dejando el mínimo posible. Los primeros temas se han puesto pensando en los estudiantes que no tienen nivel de 4º de ESO pero que realizan esta preparación, también les vendrán bien a aquellos alumno que solamente quieren hacer el acceso a ciclos. A los alumnos que si realizaron estudios de 4º de ESO les serán útiles para repasar.

Quiero agradecer a mi familia toda la paciencia y apoyo incondicional.

Vila-real, junio de 2016.

# ÍNDICE

# 1. Proporcionalidad directa e inversa

Se llama **razón** de dos números al cociente indicado de dichos números.

Los términos de una razón $\frac{a}{b}$ se conocen como el **antecedente**, al numerador "$a$", y **consecuente**, al denominador "$b$".

Si dos razones constituyen una igualdad dan lugar a una **proporción.** En toda proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ los términos $a$ y $d$ se denominan **extremos**, mientras que $b$ y $c$ se conocen como **medios**.

**PROPIEDAD: En toda proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos.**

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot d$$

**EJERCICIOS**

**1.** Averigua el término que falta para que formen proporción:

**a)** $\frac{3}{5} = \frac{x}{15}$

**b)** $\frac{3}{5} = \frac{15}{x}$

**c)** $\frac{3'5}{2} = \frac{10'5}{x}$

**d)** $\frac{x}{5} = \frac{1'05}{3}$

Dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando al aumentar una lo hace la otra o al disminuir una lo hace la otra en la misma relación. Por ejemplo si compro un kilo de naranjas y me cuesta 0'8 € al comprar dos kilos pagaré 1'6 €.

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando al aumentar una la otra disminuye o al disminuir una otra aumenta en la misma relación. Por ejemplo si pinto una pared en 3 horas. Al pintarla entre dos personas nos costará 1'5 horas.

# 2. Problemas de proporcionalidad. Regla de tres

- **Directa:** utilizada en problemas con dos magnitudes directamente proporcionales (como distancia y tiempo). Al aumentar una la otra también lo hace.

| distancia | horas |
|---|---|
| 200 km | 4 |
| 300 km | x |

$$\frac{200}{300} = \frac{4}{x} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{300 \cdot 4}{200} = 6 \text{ horas.}$$

- **Inversa::** utilizada en problemas con dos magnitudes inversamente proporcionales (como tiempo y velocidad). Al aumentar una la otra disminuye.
  **Ejemplo:** Si recorrer una distancia a 50 km/h me cuesta 4 horas, ¿cuánto me costará a 80 km/h?

| tiempo | velocidad |
|---|---|
| 4h | 50 km/h |
| x | 80 km/h |

$$\frac{x}{4} = \frac{50}{75} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{4 \cdot 50}{80} = 2'5 \text{ horas.}$$

**2.** Si un metro de tela cuesta 4'5 euros:
   **a)** ¿Cuánto costarán 4 m?
   **b)** ¿Qué longitud podré comprar con 20 euros?

**3.** Si una oferta del supermercado dan 2kg por 3 euros:
   **a)** ¿Cuánto costarán 5 kg?
   **b)** ¿Cuántos kg podré comprar con 10 euros?

**4.** Cinco agricultores recogen una cosecha en 12 días.
   **a)** ¿Cuánto tardarán en recogerla 4 agricultores?
   **b)** ¿Cuántos tienen que trabajar para recogerla en 6 días?

**5.** Un rectángulo tiene 22 cm de base y 12 cm de altura. Si queremos construir otro rectángulo de la misma área pero con 11 cm de base, ¿cuánto debe tener la altura?

**6.** Un árbol proyecta una sombra de 2,5 metros. A la misma hora un palo de 2 metros proyecta una sombra de 1,5 metros. ¿Qué altura tiene el árbol?

## 3. Porcentaje o tanto por ciento (%)

El porcentaje expresa una cantidad como parte de cien. Se expresa como %.

Para calcular los porcentajes lo podemos hacer como regla de tres.

**Ejemplo:** En una clase de 35 alumnos han aprobado el examen 15. ¿Qué porcentaje de aprobados hay?
Aplicamos una regla de tres directa:

| **alumnos** | **%** |
|---|---|
| 35 | 100 % |
| 14 | x |

$$\frac{35}{14} = \frac{100}{x} \qquad \rightarrow \qquad x = \frac{100 \cdot 14}{35} = 40\%$$

**7.** Un árbol de 15 metros crece un 20% en un año. ¿Cuántos metros crece pasado este tiempo?

**8.** De mi sueldo mensual de 1.500 € consigo ahorrar el 30%. ¿Qué cantidad me gasto?

**9.** De una clase de 50 alumnos el 40% aprueba. ¿Qué porcentaje suspende? ¿Cuántos aprueban?

# 4. Aumentos y disminuciones porcentuales

Para calcular un aumento del 20% los más conveniente es multiplicar la cantidad por 1,20. Este número es el resultado de sumar 100%+20%=120%.

Por ejemplo. Calcular el aumento de 300€ en un 20%.

Para ello podemos calcular el 20% de 300 que son 60€ y sumarlos, dándonos 360€.
Si aplicamos la regla anterior 300 x 1,20 = 360 €.

De igual forma una disminución del 20% es multiplicar la cantidad por 0,80. Este número es el resultado de restar 100% – 20% =80%.

Por ejemplo. Calcular una pérdida del 20% a mis 300€.

Para ello podemos calcular el 20% de 300 que son 60€ y restarlos, dándonos 240€.
Si aplicamos la regla anterior 300 x 0,80 = 240€.

**10.** Un árbol de 15 metros crece un 20% en un año. ¿Cuántos mide pasado este tiempo?

**11.** Una prenda de 60€ es rebajada en 10%. ¿Cuánto vale tras la rebaja?

**12.** Una inversión de 2000 € tiene un rendimiento del 15% ¿Cuánto dinero tendremos?

$$x = \frac{46}{23} = 2$$

Si elegimos la "x" multiplicamos la primera fila por 5 y la segunda fila por –2. Notar que uno de los dos números está cambiado de signo:

$$\begin{array}{r} (5) \\ (-2) \end{array} \boxed{\begin{cases} 2x \\ 5x \end{cases}} \begin{array}{l} +3y = 7 \\ -4y = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} 10x + 15y = 35 \\ -10x + 8y = -12 \end{cases} \\ + & \\ \hline / & 23y = 23 \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$y = \frac{23}{23} = 1$$

La solución del sistema es $\boxed{x = 2, y = 1}$

**45.** Resuelve por reducción los siguientes sistemas:

**a)** $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x - 4y = -5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -x - y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ -2x + 7y = 1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ -2x + 5y = 12 \end{cases}$

Veamos **sustitución:**

**Ejemplo:** Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 5x - 4y = 6 \end{cases}$$

Un sistema 2x2 tiene, normalmente, dos letras (incógnitas) en la primera fila y dos más, iguales a las anteriores, en la segunda fila. Elegimos cualquiera y la despejamos. En nuestro caso elegimos la primera "x", la despejamos, y la sustituimos en la segunda "x".

$$\begin{cases} \boxed{2x} + 3y = 7 \\ 5x - 4y = 6 \end{cases} \quad \to 2x = 7 - 3y \to x = \frac{7 - 3y}{2}$$

$$\downarrow$$

$$5\left(\frac{7 - 3y}{2}\right) - 4y = 6$$

$$\frac{35 - 15y}{2} - 4y = 6$$

Sacando denominador común:

$$\frac{35-15y}{2}-\frac{8y}{2}=\frac{12}{2}$$
$$35-15y-8y=12$$
$$-15y-8y=12-35$$
$$-23y=-23$$
$$y=\frac{-23}{-23}=1 \longrightarrow x=\frac{7-3\cdot 1}{2}=\frac{4}{2}=2$$

La solución del sistema es $\boxed{x=2, y=1}$

**46.** Resuelve por sustitución los siguientes sistemas:

**a)** $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+y=2 \\ 2x-4y=-5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} -x-y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 5x-2y=12 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x+y=10 \\ -2x+7y=1 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -3x+2y=7 \\ -2x+5y=12 \end{cases}$

**47.** Resuelve por reducción el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+3}{2} \\ 2(x-1)=1+\dfrac{y+1}{2} \end{cases}$$

**48.** Resuelve por sustitución el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2(x+2)+5y=14 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$$

# 6. Problemas de sistemas

**49.** En una granja de pollos y conejos tenemos 200 animales. Si contamos la patas de todos tenemos 508. ¿Cuántos animales hay de cada tipo?

**50.** En una granja de pollos y conejos tenemos 100 animales. Si contamos la patas de todos tenemos 238. ¿Cuántos animales hay de cada tipo?

**51.** En un taller tenemos 20 vehículos entre motos y coches. Si contamos las ruedas nos salen 44. ¿Cuántos vehículos de cada tipo hay?

**52.** Las dos cifras de un número suman 6. Si invertimos las cifras el número es 18 unidades menor. ¿De qué número se trata?

**53.** Las dos cifras de un número suman 12. Si invertimos las cifras el número es 18 unidades menor. ¿De qué número se trata?

**54.** Las dos cifras de un número suman 5. Si invertimos las cifras el número es 9 unidades menor. ¿De qué número se trata?

Por ejemplo, con los polinomios anteriores, entonces $P(x)-Q(x)$:

$$\begin{array}{r} 5x^3-2x^2+7x-9 \\ -\quad 3x^4+2x^3 \qquad\quad -5x+6 \\ \hline -3x^4+3x^3-2x^2+12x-15 \end{array}$$

**PRODUCTO POR UN NÚMERO DE UN POLINOMIO**

Cuando multiplicamos un polinomio por un número multiplicamos todos los coeficientes de los monomios del mismo.

Por ejemplo, si tenemos $P(x)=5x^3-2x^2+7x-9$, entonces,

$$5P(x)=15x^3-10x^2+35x-45$$

Notar que el producto por un número no suele indicarse.

1. Dados los siguientes polinomios $S(x)=4x^3-3x^2+5$ y $T(x)=-5x^2+3x+7$, calcula:

   a) $S(x)+T(x)$
   b) $S(x)-T(x)$
   c) $3S(x)$
   d) $3S(x)-2T(x)$

**PRODUCTO DE DOS POLINOMIOS**

Para realizar el producto de dos polinomios multiplicamos cada monomio del primero por todos los del segundo. En el producto de dos monomios multiplicamos sus coeficientes y sumamos sus exponentes. Para no equivocarnos si falta un monomio de cierto grado en el polinomio dejamos un hueco.

Por ejemplo si tenemos $P(x)=2x^3-5x+6$ y $Q(x)=4x^2+3x-1$.

Entonces $P(x)\cdot Q(x)$:

$$\begin{array}{rrrrrr} & & 2x^3 & & -5x & +6 \\ & & & 4x^2 & +3x & -1 \\ \hline & & -2x^3 & & +5x & -6 \\ & 6x^4 & & -15x^2 & +18x & \\ 8x^5 & & -20x^3 & +24x^2 & & \\ \hline 8x^5 & +6x^4 & -22x^3 & +9x^2 & +23x & -6 \end{array}$$

## PRODUCTOS NOTABLES

Hay ciertos productos que se utilizan más y podemos aprendernos su fórmula o bien realizarlos paso a paso. Son los siguientes:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

2. Calcula los siguientes productos:

   a) $(3x^3+1)(3x^3+1)$
   b) $(2x^5+3)(2x^5-3)$
   c) $(-2x^3+5x+6)(3x^2-2x+4)$
   d) $(3x^2-5x+1)(2x-1)$

## DIVISIÓN DE POLINOMIOS

La división puede ser entre polinomios de cualquier grado. Para simplificar lo haremos solamente con polinomios en el dividendo de grado uno y sin coeficiente para la indeterminada "x". Este caso es el que también se puede realizar con la regla de Ruffini.

Por ejemplo $(4x^3-5x+2):(x-2)$

Los situamos como en una división de números, con la precaución de dejar los huecos en el dividendo cuando falte un monomio, en este caso el de $x^2$.

**Primer paso**: dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor $4x^3/x = 4x^2$. Este resultado lo apuntamos en el cociente. Multiplicamos el cociente por de divisor y cambiado de signo lo sumamos al dividendo.

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^3 & & -5x+2 & x-2 \\ \cline{4-4}
-4x^3 & +8x^2 & & 4x^2 \\ \cline{1-3}
 & 8x^2 & -5x+2 &
\end{array}$$

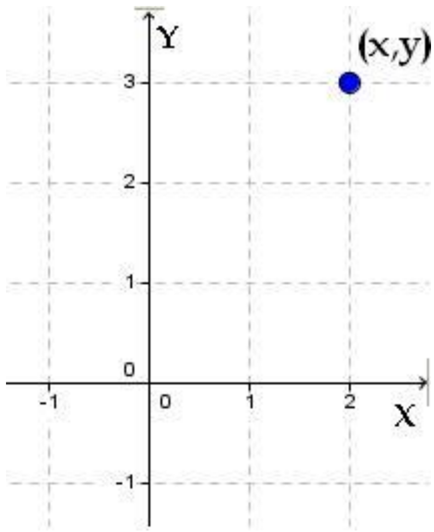
**Segundo paso y sucesivos:** realizamos la operación anterior hasta que el grado del dividendo sea menor uno, en este caso hasta que sea un número.

$$\begin{array}{rrr|l}
4x^3 & & -5x+2 & x-2 \\ \cline{4-4}
-4x^3 & +8x^2 & & 4x^2+8x \\ \cline{1-3}
 & 8x^2 & -5x+2 & \\
 & -8x^2 & +16x & \\ \cline{2-3}
 & & 11x+2 &
\end{array}$$

# 1. Coordenadas en el plano

El sistema de coordenadas sirve para situar los puntos del plano. Se trazan dos líneas perpendiculares con divisiones marcando los positivos y negativos.
La línea horizontal se llama **eje X, o eje de abcisas,** la línea vertical se llama **eje Y, o eje de ordenadas.**

Todos los puntos del plano tienen dos coordenadas P(x,y), primero se sitúa la coordenada x, después la coordenada y. El orden es importante, como en un partido de fútbol, no es lo mismo 3 a 1 que 1 a 3, en el primer caso vence el equipo de casa, en el segundo caso pierde el equipo de casa.

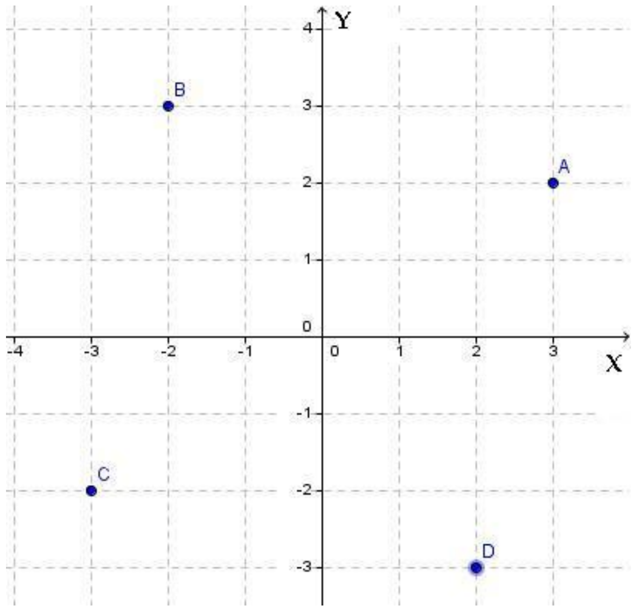



**EJERCICIOS**

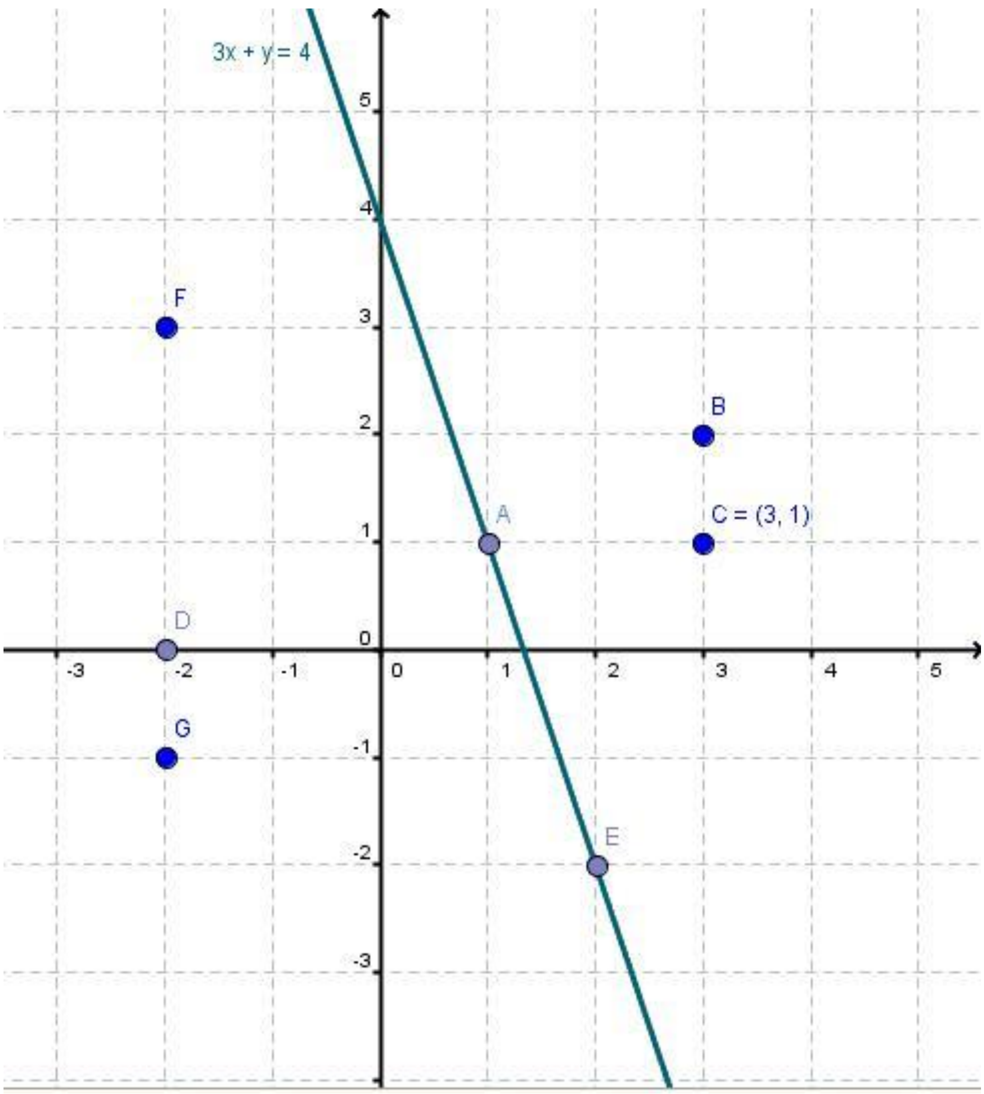
**55.** Dado el siguiente gráfico, une con flechas:

**a)** A
**b)** B
**c)** C
**d)** D

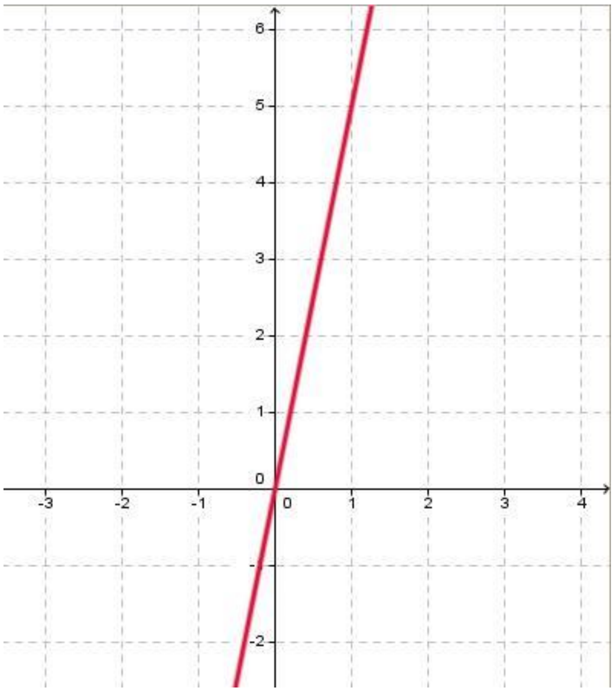
**e)** (3, 2)
**f)** (–3, –2)
**g)** (2, –3)
**h)** (–2, 3)




**56.** En el siguiente gráfico el punto C tiene coordenadas (3,1), es decir 3 a la derecha 1. La recta tiene por ecuación $3x + y = 4$.



**d)**




**63.** El recibo de telefonía de la compañía timophone viene dado por una cuota de abono de 10 euros más dos céntimos por minuto.

**a)** Escribe la función que asocia la duración en minutos con el total de euros a pagar.
**b)** Sabiendo que la duración de las llamadas fue de 2 horas y 25 minutos, ¿cuánto se pago en ese recibo?
**c)** ¿Cuántos minutos utilizó el teléfono una empresa si pagó de recibo mensual 58 euros?

**64.** Un vendedor de seguros tiene un sueldo mensual que depende de dos conceptos: sueldo base de 800 euros y un incentivo de 50 euros por póliza contratada.

**a)** Halla la función que da su sueldo mensual $y$, en función del número de pólizas contratadas $x$.
**b)** ¿Cuánto cobrará si contrata 25 pólizas?
**c)** ¿Cuántas pólizas debe contratar en un mes para que sus ingresos sean de 1250 euros?
**d)** Representa gráficamente la función.

## 4. Intersección de dos rectas. Sistemas.

Un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -2x - y = -3 \end{cases}$ se puede resolver por sustitución, igualación o reducción. Introducimos ahora el método gráfico. En este caso las dos rectas son **secantes,** se cortan en el punto (2,–1), aunque podrían ser **paralelas** y no tener ningún punto en común, con lo cual el sistema no tendrías solución.

26. Se extraen, una tras otra, 3 cartas de una baraja, con reemplazamiento (cada vez se vuelve a introducir la carta en el mazo). ¿Cuál es la probabilidad de obtener las tres veces "ESPADAS"?

**Experiencias dependientes**: cuando el resultado de una de ellas influye en las probabilidades de las siguientes.

Si A y B son **dependientes**, se verifica **P[A∩B]=P[A] ·P[B supuesto que ocurrió A]**

Ejemplo: De una urna con tres bolas rojas y cuatro azules, sacamos dos, ¿cuál es la probabilidad de que las dos sean rojas? P[1ª roja] · P[2ª roja si ya lo fue la 1ª] $= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6}$

27. Tenemos una urna con 5 bolas blancas y 2 bolas negras. Extraemos dos bolas.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
   b) ¿Cuál de que las dos bolas sean negras?
   c) Calcula la probabilidad de que la primera sea blanca y la segundad negra.

28. Extraemos dos cartas de una baraja española, cuál es la probabilidad de que la primera sea "caballo" y la segunda "as"?

La probabilidad de la unión de sucesos **incompatibles** A y B es

**P[A∪B]=P[A]+P[B]**

29. Para el próximo examen de Historia entran 10 temas de los que sólo te sabes 7. En el examen tendrás que contestar a dos temas. Calcula la probabilidad de que :

   a) Te sepas los dos temas.
   b) No te sepas ninguno de los dos.
   c) Te sepas sólo uno de los dos.

30. Tenemos dos bolsas con siete bolas cada una, la 1ª con 6 blancas y 1 roja, la 2ª con 4 blancas y 3 rojas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar una de estas bolsas y extraer de ella una bola?

31. Tenemos dos bolsas, A y B, con 10 bolas cada una. Las composiciones son:
A: 6 bolas blancas y 4 negras
B: 1 bola blanca, 4 negras y 5 rojas.

Tiramos un dado. Si sale 1, 2,3 ó 4 extraemos una bola de A. Si sale 5 ó 6, extraemos una bola de B.

   a) Calcula la probabilidad de extraer bola roja.
   b) La probabilidad de extraer bola negra

Para tres sucesos dependientes:

**P[A∩B∩C]=P[A] ·P[B ocurrido A] ·P[C ocurridos A y B]**

Ejemplo: Extraemos tres cartas de una baraja. ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 ases?

P[AS en la 1ª] ·P[AS en la 2ª si hemos sacado uno ya] ·P[AS en la 3ª si hemos sacado dos] $= \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38} = \frac{24}{59280} = \frac{1}{2470}$

32. Una urna contiene 6 bolas negras y 5 blancas. Extraemos tres bolas.¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean blancas? ¿Cuál es la de que las tres sean negras?

33. Extraemos tres cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de que:
    a) Las tres sean figuras.
    b) Sean dos caballos y un rey en cualquier orden.

34. Pepe tiene en su monedero 5 monedas de cinco céntimos de €, 3 de veinte céntimos de € y 2 de cincuenta céntimos de €. Saca dos monedas al azar. ¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?:
    a) Que las dos sean de cinco céntimos.
    b) Que ninguna sea de cincuenta céntimos.

**b)** $\begin{pmatrix} x & 2 & y-1 \\ 3 & d & 6 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 5 & a & 4 \\ b & -2 & m \end{pmatrix}_{2x3}$

## 2. Operaciones con matrices

**Suma**

Para que dos matrices puedan sumarse es necesario que tengan la misma dimensión. Si esta condición se cumple se suman los términos que ocupan la misma posición.

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2x3} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}_{2x3}$$

**Producto de un número por una matriz**

Al multiplicar la matriz por un número se multiplican cada uno de los elementos que contiene la matriz. No cambia la dimensión de la matriz.

Por ejemplo:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2x3} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 18 \end{pmatrix}_{2x3}$$

**Producto de dos matrices**

Para poder realizar este producto las dimensiones de las matrices deben cumplir una condición respecto a sus dimensiones. Si la dimensión de la primera es 3x4 la dimensión de la segunda debe ser 4x(número), por ejemplo 4x2, la matriz resultado tendrá dimensión 3x2. Es decir el segundo número de la primera dimensión coincide con el primer número de la segunda dimensión, es decir coinciden el segundo y tercer número. La matriz resultado tiene dimensión (primero)x(cuarto).

Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 24 \end{pmatrix}_{2x2}$$

¿Cómo realizamos los cálculos?

Cada elemento de una de las dos filas de la primera matriz lo multiplicamos por cada elemento de las dos columnas de la segunda matriz y sumamos el resultado de estos productos, dando como resultado cuatro combinaciones. Veámoslo paso a paso.

Primer paso: primera fila con primera columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & & \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \\ 3 & \\ 2 & \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 = 3$$

Segundo paso: segunda fila con primera columna

$$\begin{pmatrix} & & \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \\ 3 & \\ 2 & \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} & \\ 9 & \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 9$$

Tercer paso: primera fila con segunda columna.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ & & \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} & 0 \\ & 1 \\ & 4 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} & -2 \\ & \end{pmatrix}_{2x2}$$

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 = -2$$

Cuarto paso: segunda fila con segunda columna.

$$\begin{pmatrix} & & \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}_{2x3} \cdot \begin{pmatrix} & 0 \\ & 1 \\ & 4 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} & \\ & 24 \end{pmatrix}_{2x2}$$

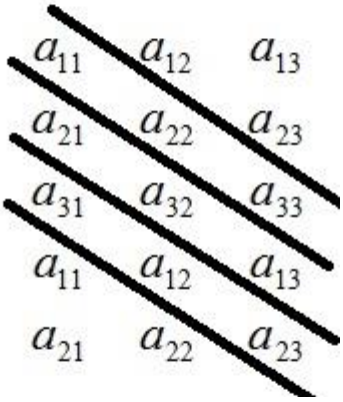
$$3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 6 \cdot 4 = 24$$

Evidentemente el orden puede cambiar pero debemos multiplicar cada fila de la primera con cada columna de la segunda matriz.

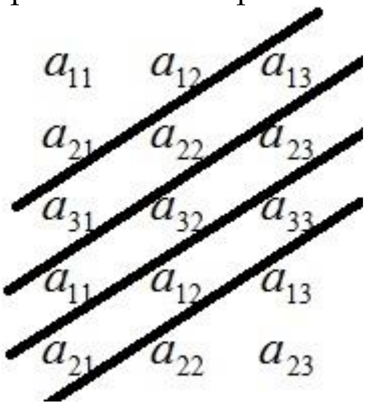
La **matriz identidad** es aquella matriz cuadrada que es neutra para el producto. En el caso de los órdenes 2 y 3 son las siguientes:

Esta última fórmula se puede memorizar con la **regla de Sarrus**, que consiste en identificar las diagonales que suman y las que restan. Repetimos debajo de la tercera fila la primera y la segunda:

Diagonales que suman (aunque el resultado pueda ser negativo):




Diagonales que restan (aunque el resultado pueda ser positivo):




Por ejemplo:

Calculamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-2) \cdot 5 + (-3) \cdot 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \cdot 3 - (-1) \cdot (-3) \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 0 = -25$$

9. Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{array}{l} x+2y-3=0 \\ 3x+6y-9=0 \end{array}$

c) $\begin{array}{l} 2x-y+3=0 \\ -2x+y-3=0 \end{array}$

2. Halla la ecuación de la recta que pasa por $(1,2)$ y es:

   a) Paralela al eje X.
   b) Paralela al eje Y.
   c) Paralela a la recta $y=3x-1$.
   d) Paralela a la recta $3x+2y+1=0$.
   e) Paralela a la bisectriz de primer cuadrante.

## 3. Distancia entre dos puntos

En primer lugar aprendemos a calcular la **distancia entre dos puntos**, que básicamente es utilizar el Teorema de Pitágoras.

En los libros de bachillerato se defina la distancia entre dos puntos $A$ y $B$, como el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

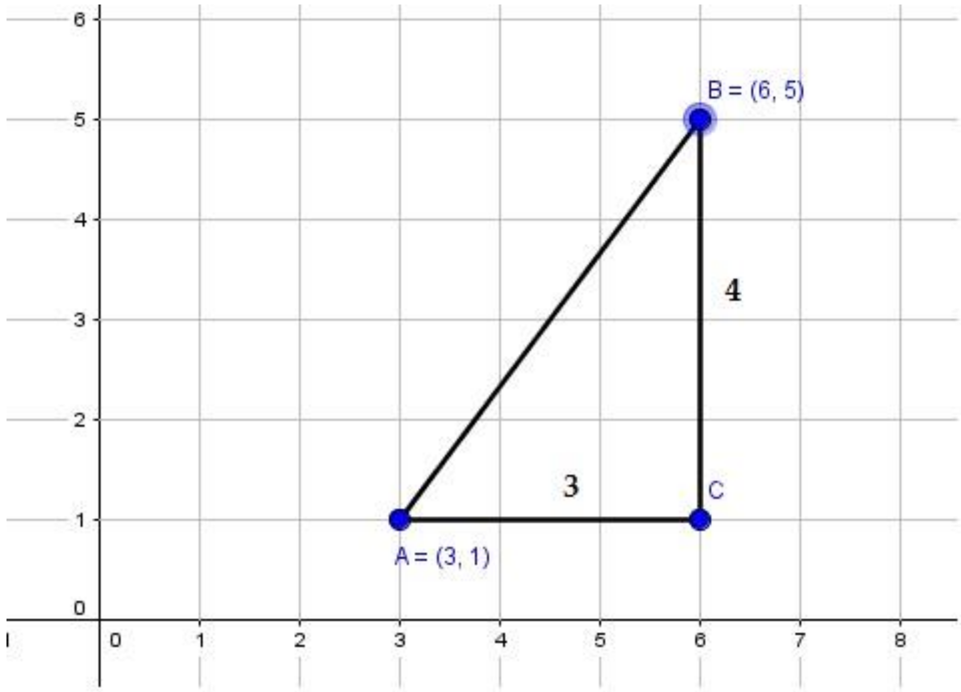
Si tenemos las coordenadas de $A(x_a,y_a)$ y las de $B(x_b,y_b)$ entonces el vector se define como $\overrightarrow{AB}=(x_b-x_a,y_b-y_a)$ entonces la distancia

$$\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}}$$

que es otra forma de expresar el Teorema de Pitágoras. Veamos un ejemplo:

Para calcular la distancia entres los puntos $A(3,1)$ y $B(6,5)$ aplicamos la fórmula anterior

$$\boxed{d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(6-3)^2+(5-1)^2}}$$




$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

3. Calcula la distancia entre los puntos, dibuja los puntos si te ayuda:

   a) $A(1,2)$ y $B(4,6)$
   b) $A(2,2)$ y $B(5,2)$
   c) $A(-1,2)$ y $B(3,4)$

**Propiedades de la distancia**

- Si la distancia entre dos puntos es cero es porque son el mismo punto.
- La distancia de A a B es igual que la de B a A.
- **Desigualdad triangular:** en un triángulo cualquier lado mide menos que la suma de los otros dos.

4. En el triángulo $A(3,1)$, $B(6,5)$ y $C(6,1)$ se cumple la desigualdad triangular, es decir, cualquier lado mide menos que la suma de los otros dos.

## 4. Distancia de un punto a una recta

Dado un punto con coordenadas $\boxed{P(x_p, y_p)}$ y una recta que debe estar en su forma general $\boxed{Ax + By + C = 0}$ entonces la distancia entre este punto y la recta se calcula como el resultado positivo (llamado valor absoluto) de sustituir las coordenadas del punto en la ecuación dividido por la raíz cuadrada de la suma de los coeficientes "x" e "y" de la recta elevados al cuadrado: