

LOW
COST

books

$$\frac{1}{2} \sin 2x = \frac{5}{8}$$

$$\sin 2x = \frac{5}{4}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \dots$$

MATEMÀTIQUES

PREPARACIÓ PER A LA PROVA D'ACCÉS A
CICLES FORMATIUS DE GRAU SUPERIOR

JOSEP MULET SOLER

SERIE CICLOS FORMATIVOS

PROVA D'ACCÉS A CICLES FORMATIUS
DE GRAU SUPERIOR
MATEMÀTIQUES

JOSEP MULET SOLER



VALENCIA 2012

PRESENTACIÓ

Per a l'alumnat que no reunit els requisits acadèmics d'accés directe, la legislació vigent estableix la possibilitat d'accedir a la Formació Professional sempre que, a través d'una prova regulada per les Administracions Educatives, l'aspirant demostre tindre la preparació suficient per a cursar amb aprofitament estes ensenyances.

Este llibre va dirigit a l'alumnat que mitjançant la prova d'accés vulga accedir als estudis d'un cicle formatiu de grau superior. El llibre s'ha elaborat a partir del Currículum de matemàtiques que forma part de les proves d'accés a cicles formatius de grau superior de Formació Professional en la Comunitat Valenciana. El manual incideix principalment en els aspectes pràctics de les matemàtiques que són el que l'alumne haurà de demostrar en la prova.

Amb el llibre pretenem que es troben còmodes tant les persones que assisteixen a cursos guiats per professors, com les persones que vulguen aprendre de forma autodidàctica i que es vulguen presentar a la **Prova d'Accés a Cicles Formatius de Grau Superior**. Així hem optat per posar les solucions de les activitats perquè faciliten la tasca no tan sols a qui treballen el curs en casa, sinó als que assistisquen a classes, ja que els permetrà comprovar immediatament si estan treballant bé o si no han entés la teoria.

A més a més, per a facilitar a l'estudiant la pràctica d'exercicis del tipus d'examen, s'inclouen també exercicis d'autoavaluació extrets de proves d'anys anteriors.

MATEMÀTIQUES

La prova s'ajustarà als continguts i criteris d'avaluació dels quatre blocs del currículum:

- Números
- Geometria
- Funcions
- Estadística i probabilitat

Es plantejaren 5 preguntes i seguirà esta estructura:

1) 1 o 2 preguntes relacionades amb el Bloc I: Numeració

- Problemes relacionats amb proporcionalitat.
- Resolució d'equacions o sistemes d'equacions.
- Problemes que es resolguen per mitjà de la utilització d'equacions o sistemes.
- Operacions amb polinomis.

2) 1 o 2 preguntes relacionada amb el Bloc II: Geometria

- Resolució de triangles rectangles aplicant fórmules i raons trigonomètriques.
- Determinació de l'equació de la recta en distintes situacions.

3) 1 o 2 preguntes relacionada amb el Bloc III: Funcions

- Obtenir la fórmula d'una funció a partir dels seus valors.
- Interpretació i conclusions de les funcions a partir de la seua fórmula, taula de valors i/o representació gràfica.
- Problemes de comparació de funcions.

4) 1 o 2 preguntes relacionada amb el Bloc IV: Estadística - Probabilitat

- Exercicis sobre conceptes estadístics d'ús corrent (càlcul dels paràmetres de centralització i dispersió) i elaboració i interpretació de la informació proporcionada (taules i gràfiques).
- Assignar probabilitats a successos corresponents a fenòmens simples i compostos.

Criteris d'avaluació i qualificació

1. Tots els exercicis tindran el mateix valor.
2. Es valora el plantejament correcte, tant global com de cada una de les parts, si les haguera.
3. Està permès l'ús de calculadora científica no programable, així com regles o compàs.
4. Les idees, gràfics, presentacions, esquemes, etc., que ajuden a visualitzar millor el problema i la seua solució es valoraran positivament.
Es valorarà la bona presentació.

ÍNDEX

BLOC I: NUMERACIÓ

1. Problemes aritmètics	13
Proporcionalitat	14
Repartiments proporcionals.....	16
La fracció com operador	18
Càlculs amb percentatges.....	22
2. Polinomis	25
Polinomis	26
Operacions amb monomis.....	28
Operacions amb polinomis.....	29
Identitats notables.....	32
Divisió d'un polinomi pel binomi $(x - a)$. Regla de Ruffini.....	34
Teorema del residu.....	36
Operacions combinades.....	38
3. Equacions amb una incògnita.....	41
Equacions: primeres definicions.....	42
L'equació de primer grau	43
Passos per a resoldre una equació de primer grau	44
L'equació de segon grau	54
Resolució de l'equació completa.....	56
Equacions de segon grau incompletes.....	58
Equacions de segon grau més complexes	60
Equacions amb radicals	64
4. Sistemes d'equacions.....	73
Mètodes de resolució.....	74
Sistemes més complexos	80
Sistemes de tres incògnites.....	82
5. Problemes d'equacions i sistemes.....	91
Cóm es resol un problema'	92
Traducció al llenguatge simbòlic	94
Resolució de problemes	96
Autoavaluació	106

BLOCS II i III: GEOMETRIA – FUNCIONS

6. Funcions lineals	115
Com se'ns presenten les funcions	116
Representació gràfica	118
Funció de proporcionalitat directa	120
Expressió general de la recta	124
7. Trigonometria	133
Mesura d'angles	134
Raons trigonomètriques d'un angle agut	135
Utilització de la calculadora	136
Resolució de triangles rectangles	138
Resolució de triangles qualssevol	144
Autoavaluació	150

BLOC IV: ESTADÍSTICA – PROBABILITAT

8. Estadística	155
Estadística. Conceptes generals	156
Taules estadístiques	157
Representació gràfica	158
Mesures de centralització	162
Mesures de dispersió	170
9. Probabilitat	177
Successos aleatoris	178
Idea intuïtiva de la probabilitat. Llei dels grans números	184
Successos elementals equiprobables. Llei de Laplace	188
Composició de successos aleatoris	193
Autoavaluació	198

PROVES D'ANYS ANTERIORS	200
--------------------------------------	------------

6 Funcions lineals



CONTINGUT

1. Com se'ns presenten les funcions
2. Representació gràfica
3. Funció de proporcionalitat directa
4. Expressió general de la recta

La x s'anomena
**variable
independent.**

La y s'anomena
variable dependent.

1. Com se'ns presenten les funcions

Una funció relaciona dues variables numèriques a les que normalment se les anomena x i y . Esta relació pot especificar-se mitjançant un text, una taula de valors, una gràfica o una fórmula matemàtica.

Mitjançant un text

A partir d'un enunciat o una descripció d'un cas es poden relacionar dues magnituds i obtenir una informació a partir de la qual es puguin elaborar taules de valors o una representació gràfica.

Exemple:

Un tècnic electricista cobra pel desplaçament al lloc de la reparació 15 €, i per cada hora de treball 10 €.

- a) ¿Quant costa un treball d'1 hora? ¿Y un de 2 hores?
- b) Fes una taula temps-cost. Representa gràficament els valors obtinguts.
- c) Expressa y en funció de x .
- d) Si l'import cobrat ha sigut de 50 €, calcula el temps invertit pel fontaner.

Mitjançant una taula de valors

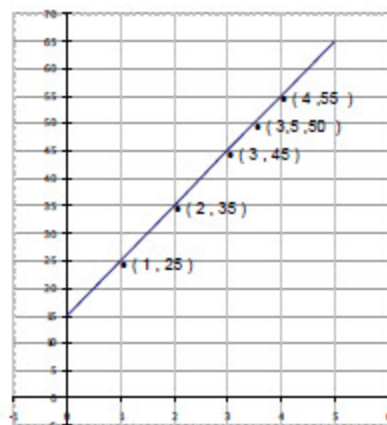
Una taula de valors de doble entrada, una per a la x i una altra per a la y corresponent.

Per l'exemple del fontaner anterior podria construir la taula amb els valors:

x (horas)	y (€)
1	25
2	35
3	45
3,5	50
4	55

Mitjançant una gràfica

Si represente la taula de valors anterior obtindrè la gràfica següent:

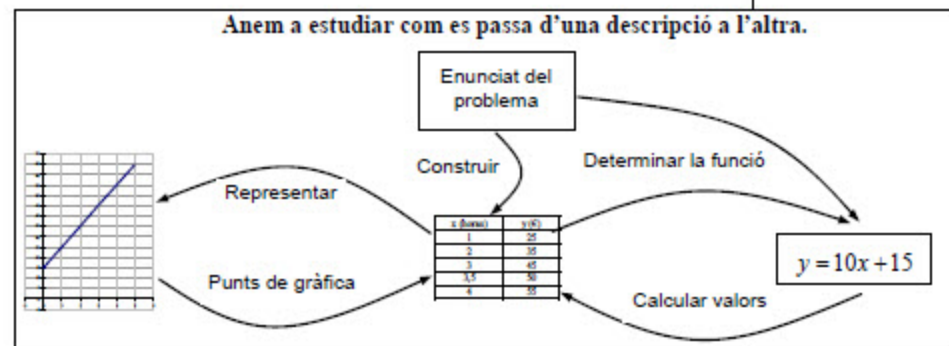


Mitjançant una expressió analítica o fórmula

L'expressió analítica es la forma més precisa d'expressar una funció.

En l'exemple del problema del fontaner, la funció que relaciona les hores de treball (x) amb el cost de la reparació (y) és:

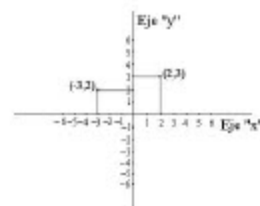
$$y = 10x + 15$$



2. Representació gràfica

Sistema de coordenades cartesianes

Consisteix en dividir el pla en quatre parts mitjançant dos rectes perpendiculars entre si (horitzontal i vertical). Estes rectes es tallen en un punt que rep el nom d'**origen de coordenades**.



Sistema de coordenades cartesianes

Cada recta es divideix en segments d'igual longitud. En la recta horitzontal (anomenada "**eix d'abscisses**" o "**eix de les x**"), s'assignen cap a la dreta els valors positius; i cap a l'esquerra els valors negatius. D'igual forma es fa amb la recta vertical (anomenada "**eix d'ordenades**" o "**eix de les y**"), cap amunt valors positius; i cap avall negatius.

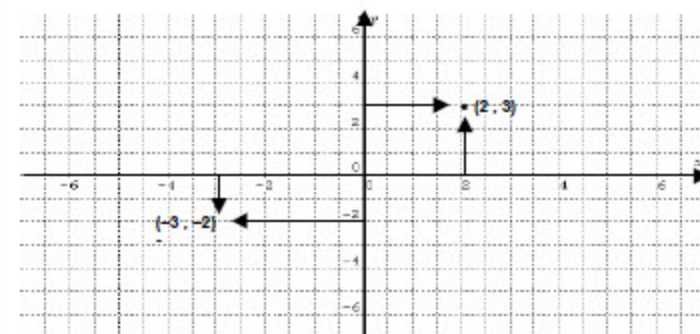
Punts del pla

De esta manera cada punt del pla es localitza mitjançant dos nombres, un corresponent a cada eix, que s'escriuen entre parèntesis i separats per una coma (x, y). Este parell de nombres s'anomenen **coordenades**. Lògicament el $(0,0)$ és el punt on es tallen els dos eixos.

Exemple:

El punt de coordenades $(2,3)$ es localitza situant-nos en el punt marcat amb el 2 en l'eix de les "x"; des d'aquí, pugem cap amunt fins el lloc marcat amb el 3 en l'eix de les "y".

D'igual forma pel punt $(-3,-2)$, ens situem en la marca -3 de l'eix "x" i baixem verticalment fins el -2 de l'eix "y".



Exercici:

3. El consum de gasolina d'un cotxe és de 6 litres als 100 Km.

Elabora una taula de valors que relacione la gasolina gastada amb la distància recorreguda en Km. Representa gràficament.

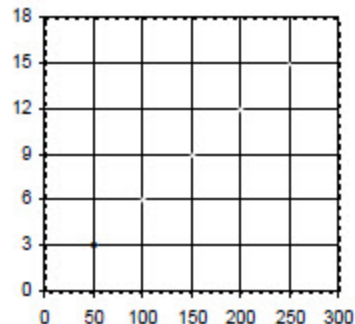
Esbrina l'expressió analítica de la relació gasolina-distància. Si hem consumit 33 litres, ¿quants Km hem fet?. ¿Y si hem consumit 51 litres?

Si gasta 6 litres a los 100 Km, por cada Km gastará:

$$\frac{6}{100} = 0,06 \text{ litres/Km.}$$

Completa la taula de valors i representa:

x (Km)	y (litros)
50	$0,06 \cdot 50 = 3$
100	



Determinació de l'expressió analítica:

Mètode intuïtiu:

Per calcular la columna de la y en la taula, multipliquem el número de Km por 0,06 litres/Km.

Per tant: $y = 0,06x$

Mètode algebraic:

És una funció de proporcionalitat la fórmula de la qual és: $y = mx$

Càlcul de m	→	m =		Funció	→	y =	
-------------	---	-----	--	--------	---	-----	--

A partir de la funció es calculen els Km recorreguts pels consums de 33 i 51 litres:

$y = 33$	←	Consum 33 litres		←	Consum 51 litres
$33 = 0,06x$	←	Substituïm la y en la funció		←	Substituïm la y en la funció
$x = \frac{33}{0,06} = 550$	←	Aïllem la x		←	Aïllem la x
$x = 550 \text{ Km}$	←	Solució		←	Solució

Exercicis

4. Si una polsada son 2,54 cm:
a) Elabora una taula de valors.
b) Escriu la funció que permeta calcular quants cm son x polsades.
c) ¿Quantes polsades són 127 cm?.

x (polsades)	y (cm)

5. Si al canvi, 100 euros són 132 dòlars:
a) Elabora una taula de valors de la relació euros - dòlars.
b) Escriu la funció que permeta calcular quants dòlars obtindrè por x euros.
c) Si m'han donat 462 dòlars, ¿Quants euros tenia?.

x (€)	y (\$)

Exercicis

6. Han arribat les rebaixes i en una tenda han decidit classificar tots els productes en tres lots, A, B y C que tindran un descompte del 20%, 30% i 50% respectivament. Si anomenem x al preu inicial i y al preu final, completa les taules següents:



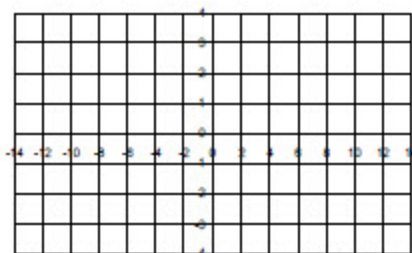
Lot A: 20%		Lot B: 30%		Lot C: 50%	
x (€)	y (€)	x (€)	y (€)	x (€)	y (€)
375,00		213,00		319,00	
452,00		202,00		297,00	
126,00		198,00		87,00	
180,00		135,00		56,00	

Escriu la funció, per a cadascun dels lots, que permeti calcular el preu rebaixat en funció del preu inicial.

7. Donada la funció definida per la taula següent:

x	-12	-4	0	8	12
y	3	1	0	-2	-3

Representa-la gràficament i calcula l'expressió analítica.



4. Expressió general de la recta

Exemple:

Troba l'equació de la recta que passa per $(-5, 7)$ i és paral·lela a la recta d'equació $y = -2x + 3$ (Dues rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent)

És una recta de fórmula	→	$y = -2x + n$
Substituïm els valors de la x i la y del punt	→	$7 = -2 \cdot (-5) + n$
Aïllem n	→	$7 - 10 = n \Rightarrow -3 = n$
Equació de la recta	→	$y = -2x - 3$

Exercicis:

Troba l'equació de la recta que passa per $(2, -1)$ i té un pendent de $m = 5$

És una recta de fórmula	→	$y = 5x + n$
Substitueix els valors de la x i la y del punt	→	
Aïlla n	→	
Equació de la recta	→	$y = 5x + 11$

Troba l'equació de la recta que passa per $(-2, 0)$ i és paral·lela a la recta d'equació $y = 3x + 5$

És una recta de fórmula	→	
Substitueix els valors de la x i la y del punt	→	
Aïlla n	→	
Equació de la recta	→	$y = 3x + 6$

Exemple:

Troba l'equació de la recta que passa per $(-2, 3)$ i $(-4, 7)$

Calculem m	\rightarrow	$m = \frac{7-3}{-4-(-2)} = \frac{4}{-2} = -2$
És una recta de fórmula	\rightarrow	$y = -2x + n$
Substituïm els valors de la x i la y d' un punt	\rightarrow	$3 = -2 \cdot (-2) + n$
Aïllem n	\rightarrow	$3 - 4 = n \Rightarrow -1 = n$
Equació de la recta	\rightarrow	$y = -2x - 1$

Exercicis:

Troba l'equació de la recta que passa per $(2, 8)$ i $(5, -1)$

Calculem m	\rightarrow	$m = \frac{-1-8}{5-2} =$
És una recta de fórmula	\rightarrow	
Substituïm els valors de la x i la y d' un punt	\rightarrow	
Aïllem n	\rightarrow	
Equació de la recta	\rightarrow	$y = -3x + 14$

Troba l'equació de la recta que passa per $(2, -1)$ i $(7, 5)$

Calculem m	\rightarrow	
És una recta de fórmula	\rightarrow	
Substituïm els valors de la x i la y d' un punt	\rightarrow	
Aïllem n	\rightarrow	
Equació de la recta	\rightarrow	$y = 1,2x - 3,4$



m s'anomena **pendent** perquè ens indica la inclinació de la recta.

Quant major es m , major és la inclinació de la recta. Si m es negativa la recta és decreixent, i si m és positiva la recta és creixent

Recorda

Si coneixem les coordenades de dos punts de la recta, (x_1, y_1) i (x_2, y_2) , el pendent de la recta es calcula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

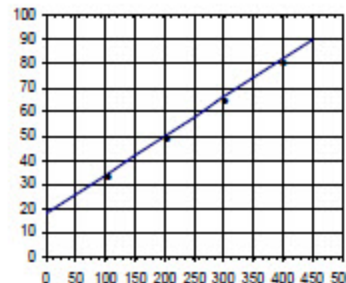
Exemple:

En el rebut de la llum figura una quantitat fixa de 18 €, i una quantitat variable que depèn del consum. El preu del kWh és de 0,16 €.

- a / Elabora una taula de valors que relacione el cost del rebut en funció dels kWh consumits. Representa-la gràficament.
b / Esbrina l'expressió analítica de la relació kWh-cost.
c / Si un rebut ha sigut de 60,4 €; ¿quin ha sigut el consum?
- a/ Construcció de la taula de valors i representació gràfica:

x (KWh)	y (€)
100	$0,16 \cdot 100 + 18 = 34$
200	$0,16 \cdot 200 + 18 = 50$
300	$0,16 \cdot 300 + 18 = 66$
400	$0,16 \cdot 400 + 18 = 82$

Elegim els valors de l' x Calculem els valors corresponents per a l' y.



- b/ Determinació de l'expressió analítica:

Mètode intuïtiu:

Per a calcular el cost (y) en la taula, hem multiplicat els kWh (x) per 0,16 i li hem sumat 18. Aleshores la fórmula que dóna el cost total serà:

$$y = 0,16x + 18$$

Mètode algebraic:

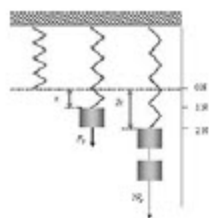
Calculem el pendent a partir de dos punts qualssevol de la taula. després, la n es calcula substituït els valors d'un punt en la funció

És una recta de fórmula	\rightarrow	$y = mx + n$
Calculem m	\rightarrow	$m = \frac{50 - 34}{200 - 100} = \frac{16}{100} = 0,16$
La fórmula queda	\rightarrow	$y = 0,16x + n$
Substituïm els valors de la x i la y d' un punt	\rightarrow	$34 = 0,16 \cdot 100 + n$
Aïllem n	\rightarrow	$34 - 16 = n \Rightarrow 18 = n$
Equació de la recta	\rightarrow	$y = 0,16x + 18$

- c/ Per a calcular el consum corresponent a una factura de 60,4 €, substituïm en la funció este valor per a la y. Quedarà, així, una equació de primer grau que en resoldre-la ens donarà el consum demanat.

Cost 60,4 $y = 60,4$
Substituïm el valor de y en la funció: $60,4 = 0,16x + 18$
Aïllem la x: $x = \frac{60,4 - 18}{0,16} = 265$
Solució $x = 265$ kWh

Exercici:

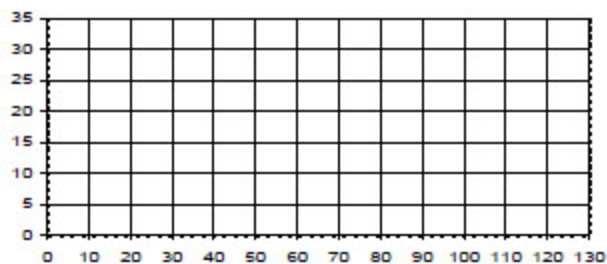


8. Al penjar d'un moll distints objectes, la longitud d'aquest s'allarga segons el pes que penja, tal i com s'indica en la taula següent:

Pes (g)	10	30	50	100
Longitud (cm)	10	14	18	28

- a) Representa gràficament.
b) Calcula l'expressió algebraica de la relació pes-longitud.
c) ¿Quina serà la longitud per a 80 g? ¿Y per a 120 g? Si té una longitud de 25 cm, ¿quin pes tindrà penjant?

- a) Representa:



- b) Calcula la funció:

Calcula m	→	
La fórmula queda	→	
Substitueix els valors de la x i la y d'un punt	→	
Aïlla n	→	
Equació de la recta	→	$y = 0,2x + 8$

- c) Completa la taula:

x (g)	y (cm)
80	
120	
	25

Exercicis

9. La tarifa d'una empresa de lloguer de cotxes es de 35 € en concepte de segur, més 15 € al dia de lloguer.

- a) Elabora una taula que relacione els dies de lloguer amb el cost.
b) Esbrina l'equació de la recta de la relació dies-cost.

x (dies)	y (€)

10. Sabem que 10 °C es corresponen amb 50 °F, i que 20 °C es corresponen a 68 °F. Calcula l'equació de la recta que permet la transformació de graus centígrads, °C, a graus Fahrenheit, °F.

Fahrenheit 451 és una novel·la de l'escriptor Ray Bradbury. El terme "Fahrenheit 451" fa referència a la temperatura a la qual el paper dels llibres s'inflama oi crema. ¿A quina temperatura es correspon en °C?



x (°C)	y (°F)
10	50
20	68
	451

Exercicis

11. Pel lloguer d'un camió cobren 100 € diaris més 0.20 € per kilòmetre. Troba l'equació de la recta que relaciona el cost diari amb el número de kilòmetres i representa-la.

Si en un dia s'ha fet un total de 300 Km., ¿quin import hem d'abonar?

12. Un tècnic de reparacions de electrodomèstics cobra 25 € per la visita, més 20 € per cada hora de treball.

Escriu l'equació de la recta que ens dóna els diners que hem de pagar en total, y , en funció del temps que està treballant, x .

¿Quantes hores ha treballat en una reparació si la factura es de 55 €?

Exercicis

13. Les despeses mensuals d'una empresa de fabricació d'ordinadors són de 6000 € fixos més 200 € per cada ordinador fabricat. Els ingressos que s'obtenen per la venda de cada ordinador són de 350 €.

Troba les funcions que ens donen els ingressos i les despeses que té l'empresa en funció del nombre d'ordinadors produïts. ¿Quina ha de ser la producció mínima d'ordinadors per a que l'empresa no tinga pèrdues?

(NOTA: Demana el punt on es tallen les dues rectes corresponents. Aquest punt és la solució del sistema format per les dues funcions)

Despeses	
x (Núm. d'ordinadors)	y (€)

Ingressos	
x (Núm. d'ordinadors)	y (€)

14. Un agricultor ven les taronges a 0,5 € el kg. Si al preu final se l'ha de sumar el 18% d'IVA, completa la taula següent, que dóna el preu a pagar per les taronges segons els kg venuts.

Troba l'expressió que permet determinar la quantitat a pagar, segons els kg venuts.

x (Kg)	y (€)

Exercici:

15. Una societat és propietària de dues empreses A i B, de les quals la primera perd 9000 € cada any, mentre que la segona guanya 24000 € cada any. Les dues empreses començaren les seues activitats al mateix temps: A amb 110000 € de capital inicial i B amb 40000 €.

- Escriu les dues funcions que indiquen com varia amb el temps el capital de cadascuna de les empreses, i la funció que dona el capital de la companyia,
- Representa gràficament les tres funcions en el mateix sistema de coordenades.
- ¿Arribaran a disposar del mateix capital las dues empreses? ¿Quan?
 (NOTA: Demana el punt on es tallen les dues rectes corresponents a cadascuna de les dues empreses. Aquest punt és la solució del sistema format per les dues funcions)
- ¿Quan serà de 255000 € el capital de la societat?

Empresa A

x (anys)	y (€)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Empresa B

x (anys)	y (€)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Capital de la societat

x (anys)	y (€)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

